Les mathématiques au XVII ème siècle

Au XVII ème siécle vont apparaître des notions qui ont fait des mathématiques le véritable langage de la recherche scientifique .
Ces recherches étaient très importantes pour l'étude des phénomènes physiques impliquant des distances , des vitesses , des accélérations ...

La formulation claire des méthodes qui permettent la représentation de figures géométriques en termes d'équations due à DESCARTES marqua un progrès essentiel par rapport à la géométrie grecque .
La conjecture ou dernier théorème de FERMAT a permis de faire des progrès considérables dans la théorie des nombres .
Plusieurs autres méthodes et approches seront développées par DESCARTES , FERMAT et par d'autres savants comme PASCAL, LEIBNITZ, NEWTON HUYGENS .....

Pour se lancer des défis (scientifiques) ou échanger leurs idées , ces savants utilisaient la correspondance .
Le père MERSENNE jouait le rôle de "centralisateur ".

Vous trouverez ci joint deux questionnaires et un texte sur l'utilisation de la méthode de DESCARTES en géométrie .

Evaluation :
Il sera tenu compte de :

- L'orthographe.
- La présentation de votre travail (originalité ; introduction ; conclusion et bibliographie)
- La rédaction (copier- coller interdit)

Questionnaire n°1 sur le texte

1. Chercher dans un dictionnaire ou encyclopédie les définitions de :

- Mathématiques
- La mathématique
- Géométrie
- Algèbre
- Courbe
- Parabole
- Conique
- Quadrature du cercle
- Conchoïde de Nicomède
- Equation
- Degré d'une équation
- Racine d'une équation
- Nombre irrationnel

2. Qui était DESCARTES ?
3. Quel était le projet ambitieux de DESCARTES ?
4. Quelle méthode a-t-il utilisée pour multiplier deux nombres entiers (algèbre des lignes ou segments) ?La décrire en utilisant le théorème de THALES.

Questionnaire n°2

1. Décrire le collège de La Flèche au XVII ème siècle .
2. Citez des noms de savants mathématiciens du XVII ième siècle ayant étudié dans ce collège ?
3. Choisir un savant parmi ces mathématiciens et faire sa biographie .Vous pouvez l'illustrer avec des citations , des anecdotes , des images , des dessins .

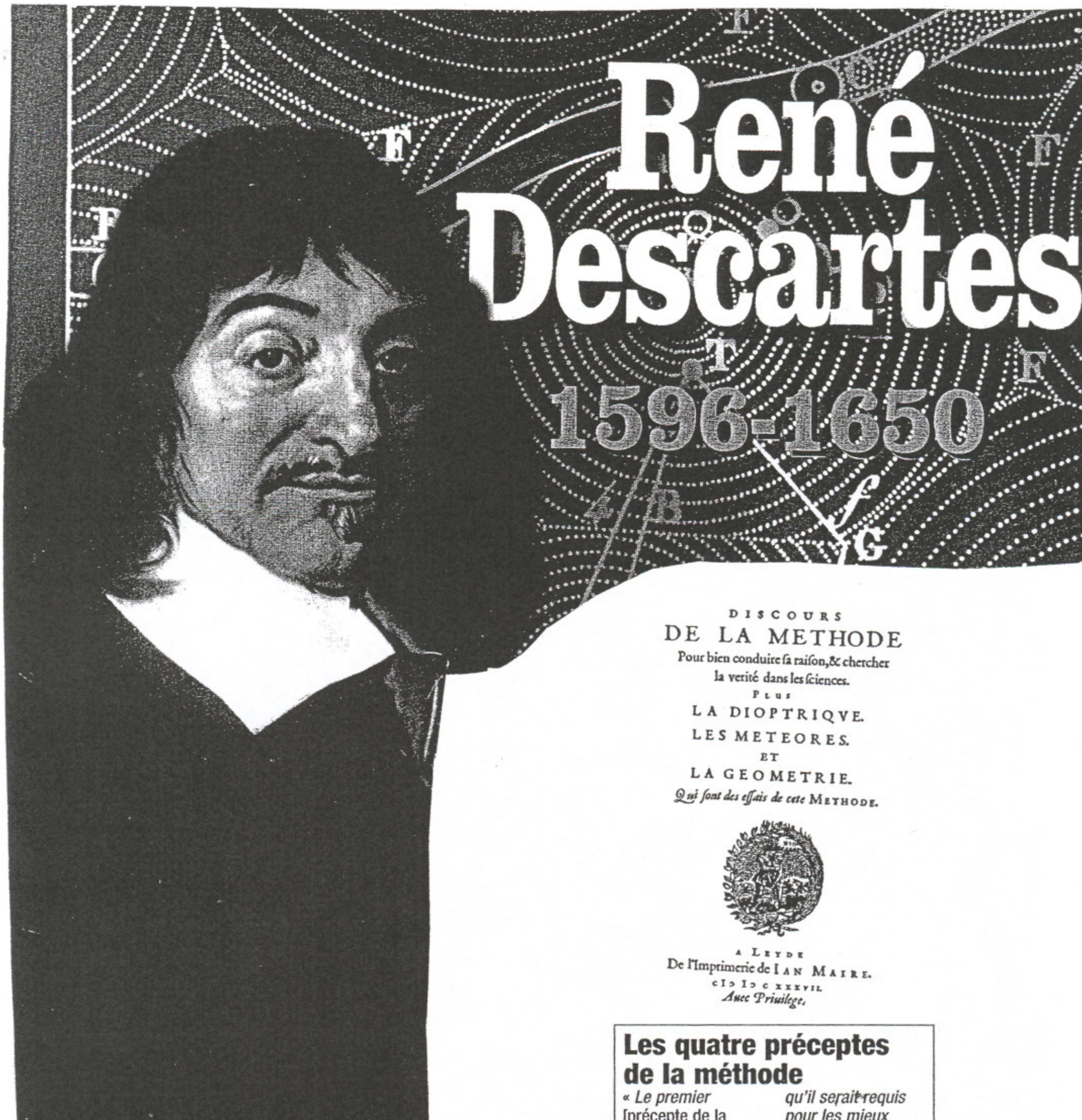
   (plan : naissance et famille ; études ; découvertes et œuvres).

   Vous pouvez enregistrer votre travail sur une cassette Audio avec un fond de musique baroque ....

   Avez-vous d'autres idées ? mettez-les en application .
3. En quelle année le premier journal des savants a-t-il été créé ?
4. En quelle année a été créée l'académie des sciences ?

René Descartes

1596-1650



DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire ſa raiſon, & chercher
la verité dans les ſciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui ſont des eſſais de cete METHODE.

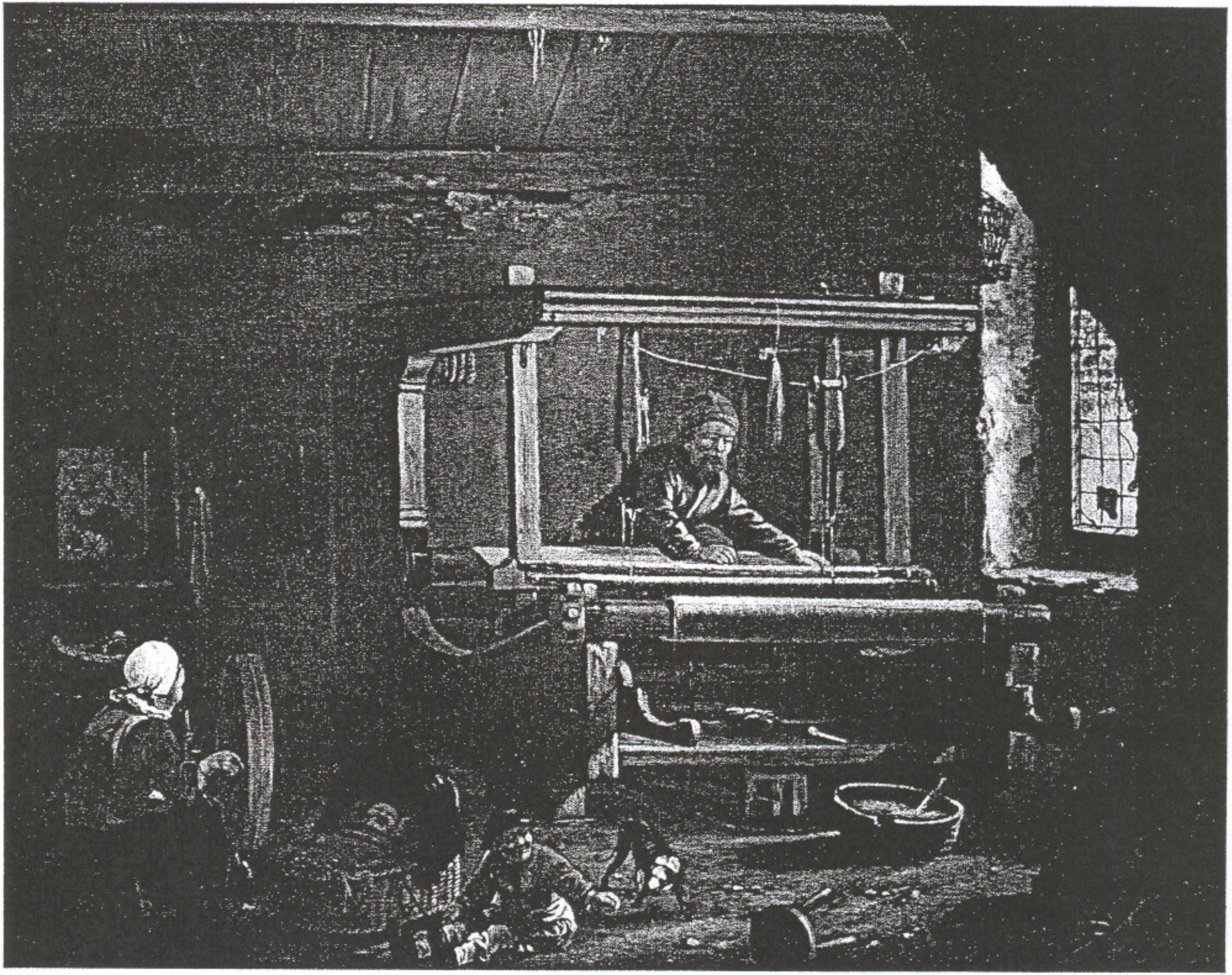
A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIƆ IƆ C XXXVII.
Avec Privilege.

Les quatre préceptes de la méthode

« *Le premier* [précepte de la méthode] *était de ne recevoir jamais aucune chose pour vraie, que je ne la connusse évidemment être telle : c'est-à-dire d'éviter soigneusement la précipitation et la prévention; et de ne comprendre rien de plus en mes jugements, que ce qui se présenterait si clairement et si distinctement à mon esprit, que je n'eusse aucune occasion de le mettre en doute.*
Le second, de diviser chacune des difficultés que j'examinerais, en autant de parcelles qu'il se pourrait et qu'il serait requis pour les mieux résoudre.
Le troisième, de conduire par ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu, comme par degrés, jusqu'à la connaissance des plus composés; et [en] *supposant même de l'ordre entre ceux qui ne se précèdent point naturellement les uns les autres.*
Et le dernier, de faire partout des dénombrements si entiers, et des revues si générales, que je fusse assuré de ne rien omettre. »

Un exemple

Pour apprendre à penser avec méthode, dit Descartes dans les* Règles pour la direction de l'esprit, *il faut commencer par observer les artisans qui mènent leur travail selon un ordre bien déterminé. (Tableau de Gillis Rombouts, 1656.)



Une relecture de la géométrie antique

Comment soumettre la géométrie aux exigences de la méthode ? Commencer par les objets les plus simples à connaître, puis monter par degrés jusqu'aux plus compliqués… Au XIXe siècle, les positivistes y verront la naissance de la géométrie analytique. À tort.

PAR GUILLAUME ORVAS

Publiée par Descartes en 1637 en guise d'échantillon de sa méthode, *La Géométrie* n'est pas un texte facile. Elle ne l'était pas pour les contemporains – et sans doute Descartes a-t-il voulu qu'il en soit ainsi. À l'époque, exposer clairement ses résultats tout en dissimulant partiellement ses méthodes est une pratique courante des savants, soucieux de préserver leurs droits sur leurs découvertes. Mais d'autres raisons rendent aujourd'hui le traité cartésien difficile d'accès. Chacun croit savoir ce que les mathématiques doivent à Descartes : la géométrie algébrique, devenue très rapidement – dès le XVIIe siècle – un instrument indispensable, notamment dans l'étude des courbes. Le vocabulaire mathématique usuel rend d'ailleurs hommage à cette invention : on parle couramment de « repère cartésien » ou de « coordonnées cartésiennes ». Et pourtant, le lecteur espérant trouver dans l'essai de Descartes un traité de géométrie algébrique risque fort d'être déçu [1]. À moins de faire des efforts, il n'y trouvera pas trace de ses « repères » familiers, ni des coordonnées dont il a l'habitude. Et les surprises ne s'arrêtent pas là. L'équivalence entre courbes et équations, notion capitale de la géométrie algébrique, reste un thème plutôt marginal chez Descartes. En revanche, l'essai s'étend longuement sur des questions purement algébriques de théorie des équations ; l'usage fait de celles-ci en géométrie est d'abord difficile à cerner exactement.

Pour comprendre ce que la géométrie algébrique doit à Descartes, il faut sans doute se demander ce qu'il a voulu faire. Au collège de La Flèche, Descartes a certainement étudié les *Éléments* d'Euclide, bel édifice reposant sur un petit nombre de principes à partir desquels sont démontrés logiquement quantité de théorèmes. Mais cette approche hypothético-déductive de la géométrie n'est pas la sienne : il s'intéresse plus aux problèmes à résoudre, qu'aux théorèmes à démontrer. Comme l'a montré Henk J. M. Bos, il s'inscrit en cela dans une tradition remontant au début de l'époque moderne, qu'il a pu connaître par exemple par les ouvrages de Clavius [2]. Peut-être la lecture de la *Collection mathématique* de Pappus a-t-elle aussi orienté ses recherches en ce sens. Certains des problèmes présentés par Pappus dans son recueil sont, au début du XVIIe siècle, des classiques. Il en va ainsi, par exemple, de la trisection de l'angle (diviser un angle donné en trois parties égales) ; de la duplication du cube (étant donné un cube, en construire un autre, de volume double) ; de l'insertion de *n* moyennes proportionnelles entre deux segments de longueurs données [3], etc. Comme on voit, résoudre ces problèmes consiste à les « construire ».

« Une science aux fondements nouveaux »

Dans ce contexte de recherches, Descartes se fixe un projet extrêmement ambitieux : il s'agit de trouver une méthode universelle de construc-

programme qu'il énonce très tôt, comme en témoigne sa lettre du 26 mars 1619 (il a alors 23 ans) à Isaac Beeckman. « *Pour vous dévoiler simplement l'objet de mon entreprise*, explique-t-il alors à son mentor, *je désire donner au public* […] *une science aux fondements nouveaux, permettant de résoudre en général toutes les questions que l'on peut poser en n'importe quel genre de quantité, tant continue que discontinue, mais chacune selon sa nature.* » [4] Par l'invention de cette méthode, Descartes espère combler une lacune de l'héritage antique. Comme nombre de mathématiciens de son temps, il soupçonne en effet les géomètres anciens d'avoir volontairement dissimulé leur « art d'inventer ». Leurs démonstrations établissent rigoureusement ce qui est recherché, mais la manière dont ces preuves ont été conçues reste trop souvent mystérieuse. Reconstruire l'« Analyse » des Anciens, tel est donc le but que, très tôt, s'est fixé Descartes.

Première question impliquée par un tel projet : quelles méthodes de construction pourra-t-on admettre comme légitimes ? Faudra-t-il s'en tenir à la règle et au compas ordinaire (c'est-à-dire aux constructions de points par intersection de droites et de cercles) ? La question est dans l'air du temps. Descartes sait, naturellement, que certains problèmes classiques issus des recherches antiques ne peuvent être résolus de cette manière. Aussi conçoit-il de « *nouveaux compas, qu*[*'il*] *estime aussi justes et aussi géométriques que le compas ordinaire avec lequel on trace des cercles* ». La lettre à Beeckman

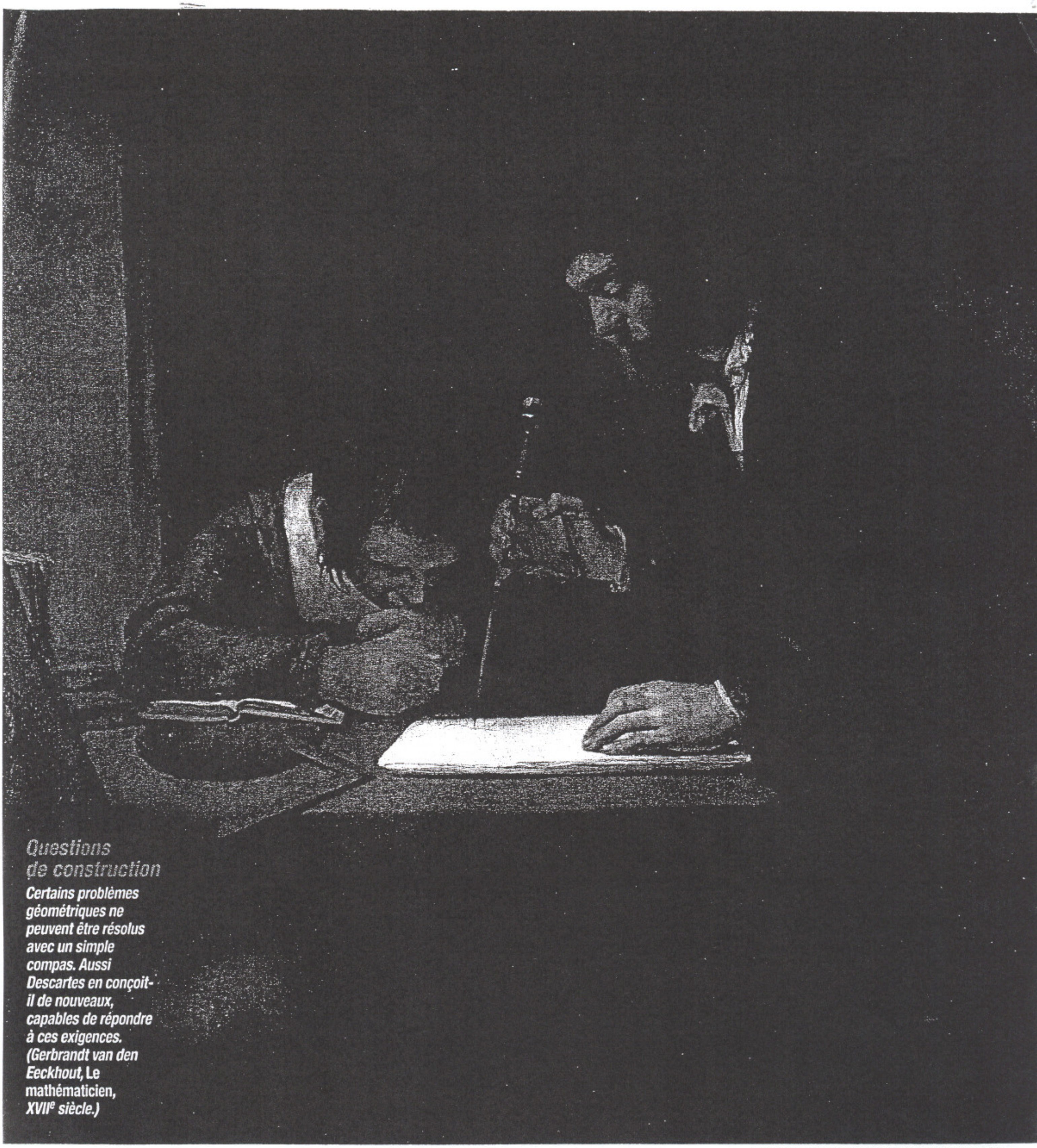
NOTES

1 – Comme le note Henk J. M. Bos dans ses Lectures on the History of Mathematics, 3 *: « The Structure of Descartes's Géométrie ». American Mathematical Society, 1993.*

2 – Que Descartes ait ou non étudié les traités de Clavius, ces derniers ont de toute façon « joué un rôle de premier plan dans l'enseignement mathématique des Pères » *jésuites (Jean Itard).*

3 – Si A et B sont les longueurs données initialement, ce problème consiste à trouver X_1, X_2, …, X_n tels que : $(A/X_1) = (X_1/X_2) = \ldots = (X_{n-1}/X_n) = (X_n/B)$.

4 – La suite de la lettre indique que la quantité discontinue relève de l'arithmétique, la quantité continue, de la

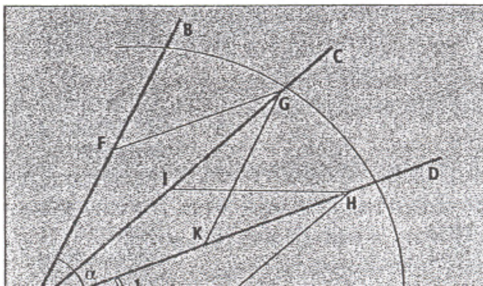


Questions de construction

Certains problèmes géométriques ne peuvent être résolus avec un simple compas. Aussi Descartes en conçoit-il de nouveaux, capables de répondre à ces exigences. (Gerbrandt van den Eeckhout,* Le mathématicien, *XVII^e^ siècle.)

THE BRIDGEMAN ART LIBRARY - CHEQUERS, BUCKINGHAMSHIRE, UK

ments de ce genre : le premier (voir la figure ci-contre) permet de diviser un angle en trois parties égales ; les trois autres (perdus, semble-t-il), de construire les racines d'équations cubiques. Probablement vers la même époque, il invente aussi un compas muni d'équerres coulissantes (le « mésolabe ») permettant d'insérer

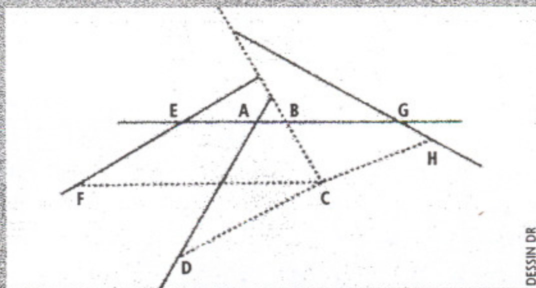


Division d'angle

Quatre règles, AB, AC, AD, AE peuvent pivoter en A. Sur chacune d'elles, à égales distances de A, sont ajustées des tiges d'égale longueur FG, IH, KG et LH. FG et KG sont que G puisse se déplacer le long de la règle AC. De même pour H, le long de AD. Pour diviser l'angle α en trois, on ouvre le compas jusqu'à ce que BAE soit égal à α : BAC est égal à

MEYER

Le problème de Pappus



En 1631, Golius soumet à Descartes le « problème de Pappus à quatre droites ». C'est un « problème de lieu » : on recherche le lieu (ou l'ensemble) des points satisfaisant certaines conditions. Soient quatre droites AB, AD, EF, GH, *« données par position »*. Pour un point quelconque du plan, on peut tracer les segments le reliant à ces droites et faisant avec elles, respectivement, des angles donnés p, q, r et s. Nommons d_1, d_2, d_3 et d_4 les longueurs de ces segments. On recherche le lieu des points C pour lesquels le rapport $(d_1.d_2)/(d_3.d_4)$ a une valeur fixée d'avance, A. L'énoncé du problème peut se généraliser à un nombre quelconque de droites (1). Supposons le problème résolu. Sur la figure, on a représenté la configuration de Pappus ; le point C est supposé satisfaire à la condition requise. Descartes désigne AB par x, et BC (c'est-à-dire d_1) par y. Les données du problème fixent sans ambiguïté tous les angles entre droites : les rapports des côtés de tous les triangles sont donc eux aussi fixés (triangles semblables). Cela permet à Descartes d'exprimer chacune des distances d_2, d_3, d_4 sous la forme $ax + by + c$ (expression du premier degré en x et y ; a, b et c sont des quantités connues, dépendant seulement des données du problème). Pour quatre droites, la condition du problème, $d_1.d_2 = A.(d_3.d_4)$, se traduit donc par une équation du second degré en x, y.

Une fois la mise en équation achevée, Descartes procède en deux temps. Il recherche d'abord un point C particulier satisfaisant à l'énoncé. Cela revient à fixer arbitrairement y : on obtient une équation du second degré en x, dont les racines sont constructibles à la règle et au compas. Dans un deuxième temps, il étudie l'ensemble des points solutions. Pour le problème à quatre lignes, Descartes construit complètement les courbes solutions (il s'agit de coniques).

Ces résultats se généralisent. Pour 2n et 2n-1 lignes, la condition du problème s'exprime sous la forme d'une équation de degré n. Les méthodes présentées en fin d'ouvrage permettent d'en construire les racines. Un nombre arbitraire de points du lieu peuvent ainsi être déterminés.

1 – Pour un nombre impair de droites, par exemple cinq, on cherche le lieu des points pour lesquels le rapport $(d_1.d_2.d_3)/(d_4.d_5.k)$ a une valeur fixée d'avance – k étant une constante donnée.

que Descartes analyse avec quelque détail dans la *Géométrie*.

On peut toutefois douter que Descartes ait vraiment construit ces mécanismes : probablement lui a-t-il suffi de les concevoir. La question, en effet, reste entière : quels compas accepter, et lesquels rejeter ? Ces instruments sont faits de parties rigides articulées ou reliées par du fil : c'est le mouvement de ces parties qui permet le tracé de courbes. Le critère d'acceptabilité s'énonce pour cette raison en termes de mouvement. Seules seront admises dans les constructions les courbes « *décrites par un mouvement continu, ou par plusieurs qui s'entresuivent et dont les derniers soient entièrement réglés par ceux qui les précèdent* ». Ainsi se trouvent exclues les courbes « *décrites par deux mouvements séparés, et qui n'ont entre eux aucun rapport* » – ou, comme il l'écrit déjà en 1619, « *engendrées par des mouvements différents les uns des autres et non subordonnés entre eux* ». Aux premières, qualifiées de « *géométriques* », s'opposent les secondes, « *qui ne sont que mécaniques* ». Parmi ces dernières figures notamment la quadratrice, introduite dans l'Antiquité pour construire un carré de même surface qu'un cercle donné (la fameuse quadrature du cercle) (5).

Toutes les courbes « *décrites par un mouvement régulier* » pourront donc servir aux constructions. Toutefois, explique Descartes, « *ce n'est pas à dire qu'il soit permis de se servir indifféremment de la première qui se rencontre, pour la construction de chaque problème : mais il faut avoir soin de choisir toujours la plus simple, par laquelle il soit possible de le résoudre* ». Le but de Descartes est d'ordonner la géométrie selon les exigences de la méthode : commencer par les objets les plus simples à connaître, pour monter par degrés jusqu'aux plus compliqués. Il s'agit donc de classer les problèmes, selon la complexité des moyens nécessaires pour les résoudre.

Les géomètres de l'Antiquité ont, certes, esquissé les débuts d'une telle classification. Dans sa *Collection mathématique*, le géomètre Pappus (IIIe siècle après J.-C.) explique que ses collègues ont pris l'habitude de distinguer les problèmes plans, solides et linéaires. Les premiers sont constructibles à la règle et au compas ; les seconds nécessitent l'utilisation des sections coniques (cercle, parabole, hyperbole) ; quant à la dernière catégorie, elle regroupe tous ceux qui ne peuvent être résolus sans l'introduction de courbes plus compliquées. Descartes souhaite perfectionner ce classement. La catégorie des problèmes linéaires lui apparaît en effet comme un « fourre-tout ». En particulier, des courbes acceptables (par exemple la conchoïde de Nicomède (6)) s'y trouvent mêlées à d'autres qui ne sont que mécaniques (par exemple, la quadratrice).

De la géométrie à l'algèbre

Seule l'algèbre permettra à Descartes d'y mettre de l'ordre. En 1619, toutefois, il ne songe pas encore à l'appliquer à la géométrie. Il semble dans un premier temps avoir plutôt fait l'inverse, en construisant par la géométrie les racines d'équations algébriques. Dès les années 1620 (et de toute façon avant 1628), il sait ainsi construire les racines des équations des 3e et 4e degrés par intersection d'un cercle et d'une parabole (7). Dix-huit ans plus tard, dans l'essai annexé au *Discours de la méthode*, l'algèbre occupe en revanche une place centrale. Elle y joue un double rôle. Elle y est présentée comme la véritable « Analyse » – comme la méthode permettant de traiter systématiquement « *tous les problèmes de géométrie* ». Et elle permet de classer les courbes, donc les problèmes. Comment est-elle devenue la « panacée » de la géométrie ?

Tournant, semble-t-il, de cette évolution : les réflexions de Descartes sur le problème qu'un certain Golius lui soumet en 1631. La question est ancien-

NOTES

5 – Le critère de démarcation proposé par Descartes soulève bien des problèmes, et deviendra pour les géomètres de la seconde moitié du XVIIe siècle un sujet de controverses. Descartes, lui, s'y tiendra – du moins dans sa Géométrie.

6 – Courbe du 3e degré.

7 – C'est-à-dire des segments de droite dont les longueurs correspondent à ces solutions. La procédure exposée dans le Journal de Beeckman *se retrouve, presque identique, dans la* Géométrie *de 1637.*

8 – Le terme en x^3 pour une équation de degré 4, par exemple.

9 – Comme c'est le cas pour les équations jusqu'au degré 4 inclus.

ne: elle est exposée par Pappus dans sa *Collection mathématique*; Euclide et Apollonius s'y sont probablement attaqués. (Voir l'encadré p.42) Descartes y voit un défi lui permettant de mesurer ses connaissances à celles des Anciens. « *Je vous dirai que j'ai employé cinq ou six semaines à en trouver la solution*, écrit-il à Mersenne le 5 avril 1632, *et que si quelque autre la trouve, je ne croirai pas qu'il soit ignorant en Algèbre.* » Sans cette dernière, Descartes juge à peu près impossible de parvenir à une solution générale.

Dès lors, l'algèbre est devenue l'instrument indispensable en géométrie. Descartes est persuadé qu'elle permettra de venir à bout de toutes les questions. Toutes, écrit-il en effet en 1637, « *se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connaître la longueur de quelques lignes droites, pour les construire* ». De fait, c'est une algèbre des lignes (ou des longueurs de segments) que Descartes propose, et non une géométrie des coordonnées (ce dernier terme n'apparaîtra qu'avec Leibniz). Les premières pages de la *Géométrie* expliquent comment les opérations usuelles de l'algèbre pourront porter sur ces lignes (voir l'encadré ci-contre). Dès lors la méthode de résolution cartésienne se déroule en trois temps.

Première étape: la mise en équation. Supposant le problème résolu, il faut « *donner des noms à toutes les lignes, qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues, qu'aux autres. Puis sans considérer aucune différence entre ces lignes connues, et inconnues, on doit parcourir la difficulté, selon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous en quelle sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres, jusqu'à ce qu'on ait trouvé moyen d'exprimer une même quantité en deux façons: ce qui se nomme une Équation* ».

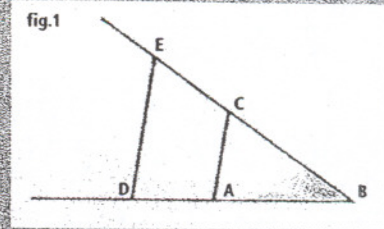
Deuxième étape: l'équation se trouve réduite ou simplifiée autant que possible, et écrite sous une forme canonique accessible aux méthodes de construction exposées par la suite. Ainsi se justifient les développements

l'ouvrage, clairement annoncé par son titre. Il s'agit de règles permettant, par exemple, d'abaisser le degré d'une équation par factorisation ou de supprimer son « second terme » [8] par changement de variables. Descartes, ne l'oublions pas, veut résoudre ses problèmes par les moyens les plus simples. Cependant la résolution numérique de l'équation ne le concerne pas. À l'époque, en effet, les quantités irrationnelles restent exclues du domaine du nombre. Dans la tradition d'Eudoxe et d'Euclide, Descartes les représente par des grandeurs géométriques.

C'est pourquoi une fois l'équation réduite – et même si l'on peut exprimer ses racines en fonction des coefficients [9] – la moitié du chemin reste à faire. Il faut encore construire les lignes solutions du problème. Le problème de Pappus a conduit Descartes à classer les courbes géométriques en « genres », selon le degré de leur équation. Chaque genre regroupe en fait deux degrés successifs: le premier, les courbes dont l'équation est de degré inférieur ou égal à deux; le second, à quatre, et ainsi de suite. L'algèbre permet ainsi de classer les courbes, des plus simples aux plus complexes.

Quand l'équation à laquelle le problème initial a conduit est de degré deux au plus, les lignes solutions peuvent se construire à la règle et au compas: ce cas ne présente pas de difficulté particulière et est pour cette raison traité par Descartes dès le premier livre de son traité. Pour les équations de degré supérieur, les intersections de droites et de cercles ne suffisent plus. La fin du livre III propose donc – c'est le couronnement de l'ouvrage – des procédures « standard » permettant de construire leurs racines: pour une équation de degré 3 ou 4, par intersection de coniques, plus précisément d'un cercle et d'une parabole; pour les degrés 5 et 6, par intersection d'un cercle et d'une courbe d'un degré plus composée que la parabole (du 3e degré, donc), aujourd'hui nommée « parabole cartésienne ». Le traité s'ar-

Une algèbre des lignes ou segments



Pour appliquer l'algèbre à la géométrie, Descartes établit une correspondance entre opérations fondamentales de l'arithmétique et constructions géométriques de lignes.
Pour l'addition et la soustraction, la construction ne présente aucune difficulté. Les choses se compliquent avec la multiplication. Dans le livre II des *Éléments*, Euclide représentait simplement le produit de deux longueurs par le rectangle construit sur elles. En ce cas, le résultat (une surface) n'est pas homogène aux données (des longueurs). L'intérêt des constructions cartésiennes est de lever cette difficulté. Pour la multiplication, la procédure est illustrée sur la figure 1. Elle repose sur le choix d'une longueur unité: « *Soit par exemple AB l'unité, et qu'il faille multiplier BD par BC, je n'ai qu'à joindre les points A et C, puis tirer DE parallèle à CA, et BE est le produit de cette multiplication.* »

degrés supérieurs. « *Attitude optimiste* écrit Henk Bos; *Descartes a certainemen sous-estimé les difficultés du "et cetera".* »

Comme on voit, Descartes poursui dans ce traité des buts tout à fai classiques, directement liés à l'hérita ge antique. Le programme lui-mêm s'est formé avant que l'algèbre n' intervienne à titre d'outil indisper sable. « *La révolution que Comte et les histo riens du XIXe siècle ont vu dans la Géométr analytique cache donc une illusion* » explique Gaston Milhaud. Il ne s'ag que du « *développement normal, après retour aux Grecs, des idées directrices de le analyse.* » [10] Au reste, le programme d Descartes et ses choix de méthoc connaîtront, dans la suite de l'histoir moins de succès et de développ

10 – *Gaston Milhaud*, Descartes